

Geometría Projectiva

PRIMER CUATRIMESTRE 2004

SEGUNDO PARCIAL

1. Sean $p \neq q \in \mathbb{C}[x]$ dos polinomios de grados m y n respectivamente, $f(x, y) = y - p(x)$, $g(x, y) = y - q(x)$ y $C = V(f)$, $D = V(g)$.
 - a) Probar que hay una biyección entre el conjunto de puntos $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tales que $(a, b) \in C \cap D$ y las raíces del polinomio $p - q$. Probar que por esa biyección $I((a, b), C \cap D)$ es el orden de cero de la raíz correspondiente de $p - q$.
 - b) Sean C^* , D^* las completadas proyectivas de las curvas. Encontrar los puntos en el infinito de $C^* \cap D^*$, y la multiplicidad de intersección de C^* y D^* en ellos.
2.
 - a) Sea $C = V(F) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, donde $F = X^2 + Y^2 - Z^2 - W^2$. Probar que C contiene rectas (exhibir dos distintas).
 - b) Exhibir una recta incluída en $C_* \subset \mathbb{R}^3$.
 - c) Probar que cualquier cuádrica no-singular $C \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ contiene rectas (exhibir dos distintas).
3. Sea $F = X^3 + Y^3 + Z^3 + mXYZ$, con $m \in \mathbb{C}$.
 - a) Encontrar los valores de $m \in \mathbb{C}$ para los cuales F tiene puntos singulares.
 - b) Verificar que para los valores de m hallados F es producto de formas lineales.
 - c) Para los m tales que F es no-singular encontrar sus 9 puntos de inflexión.
4.
 - a) Probar que dados cinco puntos $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{P}^2(k)$, existe una cónica que pasa por ellos.
 - b) Sea F una cuártica irreducible. Probar que no puede tener 4 puntos dobles. (Sugerencia: encontrar una cónica G que pase por ellos y por un quinto punto de F y deducir que entonces G es una componente de F .)